Equations différentielles linéaires scalaire du second ordre

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a(t)\frac{dx(t)}{dt}+b(t)x(t)=c(t)}$$

1. Cas général ; Equations à coefficients non constants :

Les fonctions a, b et c définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont continues à valeurs réelles ou complexes. D'après le théorème d'existence et d'unicité, l'équation possède une unique solution définie sur I vérifiant les conditions initiales :

$$x(t_0)=x_0 \text{ et } \dot{x}(t_0)=v_0.$$

Supposons que l'on connaisse une solution particulière x_p de cette équation. On a alors

$$\ddot{x}_p+a\,\dot{x}_p+b\,x_p=c.$$

On note $x=x_h+x_p$ et le problème revient à trouver x_h. Reportons x dans l'équation générale. Il vient :

$$\ddot{x}_h+\ddot{x}_p+a\left(\dot{x}_h+\dot{x}_p\right)+b\left(x_h+x_p\right)=c$$

et comme x_p est une solution particulière ;

$$\ddot{x}_h+a\,\dot{x}_h+b\,x_h=0.$$

x_h est la solution de l'équation homogène (sans second membre).

La solution générale x est donc la somme :
- de la solution de l'équation homogène, x_h
- d'une solution particulière x_p

Solution x_h : L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2 (d'après le théorème d'existence et d'unicité des solutions à partir des deux conditions initiales). Toute solution de l'équation homogène x_h est donc une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes x_1 et x_2 de l'équation homogène ; $x_h=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$. Et les fonctions x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes si leur wronskien est non nul, c'est-à-dire :

$$W(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

- Si l'on ne connaît aucune solution de l'équation homogène, il n'existe pas de méthode générale pour trouver la solution de l'équation complète avec second membre.

- Si l'on connaît une solution (x_1 ou x_2) de l'équation homogène, il est possible d'obtenir l'autre solution de l'équation homogène donc x_h et la solution particulière x_p par des méthodes de la variation de la constante.

Solution complète $x=x_h+x_p$:

Première méthode : Connaissant x_1, on va déduire directement $x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+x_p$ où α_1 et α_2 sont des constantes.
On cherche la solution générale sous la forme $x(t)=k(t)x_1(t)$. Le problème revient donc à déterminer $k(t)$. En dérivant x :

$$\dot{x}=\dot{k}\,x_1+k\,\dot{x}_1 \qquad \text{et} \qquad \ddot{x}=\ddot{k}\,x_1+2\dot{k}\,\dot{x}_1+k\,\ddot{x}_1 .$$

En reportant dans l'équation générale :

$$\ddot{k}\,x_1+2\dot{k}\,\dot{x}_1+k\,\ddot{x}_1+a\left(\dot{k}\,x_1+k\,\dot{x}_1\right)+b\,k\,x_1=c .$$

Comme x_1 est solution de l'équation homogène on déduit :

$$\ddot{k}+\left(\frac{a\,x_1+2\dot{x}_1}{x_1}\right)\dot{k}=\frac{c}{x_1} .$$

C'est une équation du premier ordre en $\dot{k}$ que l'on sait résoudre. Posons :

$$F=\int\left(\frac{a\,x_1+2\dot{x}_1}{x_1}\right)dt .$$

La solution de l'équation homogène en k est $\dot{k}_h=A\,e^{-F}$, et par variation de la constante A, on obtient :

$$\dot{A}=\frac{c}{x_1}e^{F} \qquad \text{et} \qquad A=\int\frac{c}{x_1}e^{F}dt+\alpha_2 ,$$

où α_2 est une constante d'intégration. En posant :

$$G=\int\frac{c}{x_1}e^{F}dt \qquad \text{et} \qquad H=\int e^{-F}dt ,$$

On a donc :

$$\dot{k}=\left(G+\alpha_2\right)e^{-F} \qquad \text{et} \qquad k=\int G\,e^{-F}dt+\alpha_2\int e^{-F}dt+\alpha_1 ,$$

où α_1 est une constante d'intégration. Et puisque $x=k\,x_1$ on obtient :

$$x=\alpha_1\,x_1+\alpha_2\,x_1\int e^{-F}dt+x_1\int G\,e^{-F}dt ,$$

ou encore :

$$x=\alpha_1\,x_1+\alpha_2\,x_1\,H+x_1\int G\,\dot{H}\,dt .$$

Le premier terme de cette expression correspond à la solution connue x_1 de l'équation homogène.
On vérifie facilement que le deuxième terme $x_2=x_1\,H$ est l'autre solution de l'équation homogène et linéairement indépendante de x_1 car :

$$W(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}=x_1\,\dot{x}_2-\dot{x}_1\,x_2=x_1\left(\dot{x}_1\,H+x_1\,\dot{H}\right)-\dot{x}_1\,x_1 H=x_1^2\,e^{-F}\neq 0$$

On vérifie également que le troisième terme $x_p = x_1 \int G\,\dot{H}\,dt$ (contenant c) est une solution particulière.

Exemple :

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{2t} - \frac{x}{t^2} = t\,.$$

Une solution évidente de l'équation homogène est $x_1 = k\,t^2$ où k est une constante.
Cherchons maintenant la solution de l'équation générale sous la forme $x(t) = k(t)\,t^2$. En dérivant deux fois x on obtient :

$$\dot{x} = \dot{k}\,t^2 + 2\,t\,k \qquad \text{et} \qquad \ddot{x} = \ddot{k}\,t^2 + 4t\,\dot{k} + 2k\,.$$

Puis dans l'équation générale il vient après simplification, l'équation du premier ordre en $\dot{k}$:

$$\ddot{k} + \frac{7}{2t}\dot{k} = \frac{1}{t}\,.$$

La solution de l'équation homogène est $\dot{k}_h = A\exp\left(-\int \frac{7}{2t}dt\right) = At^{-7/2}$, où A est une constante. L'utilisation de la méthode de la variation de la constante A permet d'écrire :

$$\dot{k}(t) = A(t)\,t^{-7/2} \qquad \text{et} \qquad \ddot{k} = \dot{A}\,t^{-7/2} - \frac{7}{2}At^{-9/2}\,.$$

Et en reportant dans l'équation en $\dot{k}$ il vient : $\dot{A} = t^{5/2}$ d'où $A = \frac{2}{7}t^{7/2} + \alpha_2'$ où α_2' est une constante d'intégration. Finalement :

$$\dot{k} = \alpha_2' t^{-7/2} + \frac{2}{7} \qquad \text{et} \qquad k = -\frac{2}{5}\alpha_2' t^{-5/2} + \frac{2}{7}t + \alpha_1\,,$$

Puis $x = k\,t^2$ s'écrit :

$$x = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^{-1/2} + \frac{2}{7}t^3$$

avec α_1 et α_2 deux constantes. $t^{-1/2}$ est la deuxième solution de l'équation homogène. On vérifie $W\left(t^2, t^{-1/2}\right) \neq 0$ donc t^2 et $t^{-1/2}$ sont indépendantes. La solution particulière est $2t^3/7$.

<u>Deuxième méthode</u> : Connaissant x_1 et x_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène , $x_h = a\,x_1 + b\,x_2$. La variation des deux constantes a et b permet alors d'obtenir la solution générale $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_p$.
(si l'on ne connaît que x_1 on peut toujours déterminer x_2 par la première méthode dans le cas particulier où $c = 0$).

On cherche la solution x de l'équation complète, tel que :

$$\begin{cases} x(t) = a(t)x_1(t) + b(t)x_2(t) \\ \dot{x}(t) = a(t)\dot{x}_1(t) + b(t)\dot{x}_2(t) \end{cases}.$$

La dérivée de la première relation donne :

$$\dot{x} = \dot{a}\,x_1 + a\,\dot{x}_1 + \dot{b}\,x_2 + b\,\dot{x}_2 ,$$

et d'après la deuxième :

$$\dot{a}\,x_1 + \dot{b}\,x_2 = 0 \ .$$

La dérivée de la deuxième relation donne :

$$\ddot{x} = \dot{a}\,\dot{x}_1 + a\,\ddot{x}_1 + \dot{b}\,\dot{x}_2 + b\,\ddot{x}_2 .$$

En reportant dans l'équation complète et en tenant compte du fait que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation homogène il vient :

$$\dot{a}\,\dot{x}_1 + \dot{b}\,\dot{x}_2 = c .$$

On a donc obtenu un système de deux équations à deux inconnues $\dot{a}$ et $\dot{b}$:

$$M\begin{pmatrix}\dot{a}\\ \dot{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2\end{pmatrix}$$

La matrice M est inversible car $\det M = W(x_1, x_2) = x_1^2\,\dot{H} \neq 0$ et :

$$M^{-1} = \frac{1}{x_1^2\,\dot{H}}\begin{pmatrix}\dot{x}_2 & -x_2\\ -\dot{x}_1 & x_1\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix}\dot{a}\\ \dot{b}\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2 c / x_1^2\,\dot{H}\\ c/x_1 H\end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{cases} a = -\displaystyle\int\left(\frac{x_2\,c}{x_1^2\,\dot{H}}\right)dt + \alpha_1 = -\int\left(\frac{x_2}{x_1}\dot{G}\right)dt + \alpha_1 \\ b = \displaystyle\int\left(\frac{c}{x_1\,\dot{H}}\right)dt + \alpha_2 = G + \alpha_2 \end{cases} .$$

où α_1 et α_2 sont deux constantes. Finalement $x = a\,x_1 + b\,x_2$ donne :

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_2\,G - x_1\int\left(\frac{x_2}{x_1}\dot{G}\right)dt .$$

La solution particulière est :

$$x_p = x_2\,G - x_1\int\left(\frac{x_2}{x_1}\dot{G}\right)dt .$$

Vérifions qu'elle est identique à celle obtenue par la première méthode. Pour cela on reporte $x_2 = x_1 H$ dans l'expression de x_p, ce qui donne :

$$x_p = x_1 H G - x_1 \int \left(H \dot{G} \right) dt = x_1 \left\{ H G - \int \left(H \dot{G} \right) dt \right\} = x_1 \int G \dot{H} dt \,,$$

résultat déjà obtenu.

Exemple :

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{2t} - \frac{x}{t^2} = t \ .$$

On suppose connu les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène :

$$x_1 = t^2 \quad \text{et} \quad x_2 = t^{-1/2},$$

et on cherche la solution générale x tel que :

$$\begin{cases} x = a\, t^2 + b\, t^{-1/2} \\ \dot{x} = a\, 2t - \dfrac{b}{2} t^{-3/2} \end{cases},$$

où a et b sont fonction de t. La dérivée de la première relation comparée à la deuxième conduit à $\dot{a} = -\dot{b}\, t^{-5/2}$. On dérive la deuxième relation et en reportant x, $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ dans l'équation complète on obtient :

$$\dot{a}\, 2t - \frac{\dot{b}}{2} t^{-3/2} = t \,.$$

De ces deux dernières équations on déduit :

$$\begin{cases} \dot{a} = \dfrac{2}{5} \\ \dot{b} = -\dfrac{2}{5} t^{5/2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{a} = \dfrac{2}{5} t + \alpha_1 \\ \dot{b} = -\dfrac{4}{35} t^{7/2} + \alpha_2 \end{cases}$$

où α_1 et α_2 sont deux constantes, et la solution générale :

$$x = \left(\frac{2}{5} t + \alpha_1 \right) t^2 + \left(-\frac{4}{35} t^{7/2} + \alpha_2 \right) t^{-1/2} = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^{-1/2} + \frac{2}{7} t^3 \,.$$

2. Equations à coefficients constants :

Dans ce cas particulier, a et b sont des réels ou des complexes. Mais c est toujours une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

Le principe de la résolution est basé sur la réécriture de l'équation différentielle scalaire du second ordre sous la forme de deux équations différentielles scalaires du premier ordre.

En notant $v = \dot{x}$, l'équation $\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x = c(t)$ devient :

$$\begin{cases} \dot{v} + a\,v + b\,x = c(t) \\ \dot{x} = v \end{cases},$$

ou encore :

$$\dot{X} + AX = C(t), \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est donc une équation différentielle linéaire (non scalaire) du premier ordre avec les conditions initiales $v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0$ et $x(t_0) = x_0$.

Exemple 1 :

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{-t} .$$

En notant $v = \dot{x}$ cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{v} + 3v + 2x = e^{-t} \\ \dot{x} = v \end{cases} .$$

Ou :

$$\dot{X} + AX = C(t), \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec les conditions initiales $v(t_0) = v_0$ et $x(t_0) = x_0$.

- Recherche des valeurs propres de A :

On note λ les valeurs propres et V les vecteurs propres. Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Il y a deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. La matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- Recherche des vecteurs propres :

Pour $\lambda_1 = 1$; on cherche le vecteur propre $V_1(x,y)$. Puisque $AV_1 = V_1$, on a :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}.$$

Le sous espace propre associé à $\lambda_1 = 1$ est de dimension 1 (c'est une droite). On peut donc choisir :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda_2 = 2$; on cherche le vecteur propre $V_2(x,y)$. Puisque $AV_2 = 2V_2$, on a :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Le sous espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est de dimension 1. On peut donc choisir :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P de la base de E dans laquelle s'exprime la matrice A à la base des vecteurs propres dans laquelle s'exprime la matrice diagonale D est :

$$P = (V_1\ V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à déterminer l'inverse de P pour calculer $P^{-1}C$.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{Com}P.$$

Dans notre cas, $\det P = 1$ et :

$$\mathrm{Com}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{d'où} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit :

$$P^{-1}C = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

En notant $Q = P^{-1}X$, les équations découplées à résoudre sont $\dot{Q} + D\,Q = P^{-1}C$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 + q_1 = -e^{-t} \\ \dot{q}_2 + 2q_2 = e^{-t} \end{cases}.$$

- Solution de $\dot{q}_1 + q_1 = -e^{-t}$.

La solution de l'équation homogène est $q_1 = k_1\, e^{-t}$. La méthode de la variation de la constante permet d'obtenir $\dot{k}_1 = -1$ et $k_1 = A_1 - t$ (A_1 une constante) et donc :

$$q_1 = (A_1 - t)e^{-t}.$$

- Solution de $\dot{q}_2 + 2q_2 = e^{-t}$.

La solution de l'équation homogène est $q_2 = k_2\, e^{-2t}$. La méthode de la variation de la constante permet de trouver $\dot{k}_2 = e^{t}$ et $k_2 = A_2 + e^{t}$ donc :

$$q_2 = A_2 e^{-2t} + e^{-t}.$$

Finalement, la solution $X = PQ$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + 2q_2 \\ -q_1 - q_2 \end{pmatrix},$$

Donc :

$$\begin{cases} v = (A_1 - t + 2)e^{-t} + 2A_2 e^{-2t} \\ x = (-A_1 + t - 1)e^{-t} - A_2 e^{-2t} \end{cases}.$$

Les constantes A_1 et A_2 sont fixées par les conditions initiales. A t =0 on a :

$$\begin{cases} v_0 = A_1 + 2 + 2A_2 \\ x_0 = -A_1 - 1 - A_2 \end{cases}, \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} A_1 = -v_0 - 2x_0 \\ A_2 = x_0 + v_0 - 1 \end{cases}.$$

D'où :

$$x = \left(v_0 + 2x_0 + t - 1\right)e^{-t} - \left(x_0 + v_0 - 1\right)e^{-2t}.$$

Exemple 2 : l'oscillateur harmonique.